

METODOS VARIACIONALES

Lema de Brezis-Lieb

Sea (X, μ) un espacio con medida μ y $p \in [1, +\infty)$. Consideramos una sucesión $(f_n)_n \subset L^p(X)$ tal que $f_n \rightarrow f$ en c.t.p. de X y $\|f_n\|_p \leq C$. Verificar que $f \in L^p(X)$. Vamos a probar que

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu = \int_X |f_n|^p d\mu - \int_X |f|^p d\mu + o(1). \quad (1)$$

Notamos $g_n = f_n - f$ y

$$u_n = \left(|g_n + f|^p - |g_n|^p - |f|^p - \varepsilon |g_n|^p \right)_+.$$

Fijamos un $\varepsilon > 0$.

1. Probar que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$||a + b|^p - |a|^p| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Deducir que $u_n \rightarrow 0$ en L^1 .
3. Deducir que

$$\int_X \left| |g_n + f|^p - |g_n|^p - |f|^p \right| d\mu \leq o(1) + C\varepsilon$$

y luego (1).

4. Aplicación: si $u_n \rightarrow u$ en L^p y en ctp verificar que

$$|u_n|^{p-2} u_n \rightarrow |u|^{p-2} u \quad \text{en } L^{\frac{p}{p-1}}.$$

Operador de superposición debilmente continuo

1. Sea $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-periódica acotada, y $v_n(x) = v(nx)$, $x \in [0, 1]$. Probar que $v_n \rightarrow \int_0^1 v$ debilmente en $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, y debil-* en $L^\infty(0, 1)$.
2. Consideramos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $U = (0, 1)$ y el operador de superposicion $B : u \rightarrow f \circ u$. Probar que B es secuencialmente debilmente continua de $L^p(U)$ en $L^p(U)$ (debil-* si $p = +\infty$) ssi f es afina.
Sug: usar el punto anterior con $v = a1_{[0,\theta]} + b1_{(\theta,1]}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $\theta \in (0, 1)$, y probar que $f(\theta a + (1 - \theta)b) = \theta f(a) + (1 - \theta)f(b)$.
3. Para un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, podemos suponer que U contiene un cubo $Q = [0, 1]^n$ y considerar $v_n(x_1)1_Q(x)$.

El operador p -Laplaciano

Sea $1 < p < \infty$ y $f \in L^{p'}(U)$. Probar que existe una única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

donde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ es el p -laplaciano.

Nota: para $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$.

Verificar que además se tiene la estimación

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'/p}.$$

Problema del obstáculo - cf [3]

Sea $\mathcal{A} := \{w \in H_0^1(U) \mid w \geq h \text{ c.t.p. } U\}$ donde $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función regular llamada el *obstáculo*. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ regular y asumamos que el conjunto de funciones admisibles \mathcal{A} es no vacío.

1. Probar que existe una única función $u \in \mathcal{A}$ que verifica

$$I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w),$$

donde

$$I(w) := \int_U \frac{1}{2} |Dw|^2 - fw \, dx.$$

2. Probar que u verifica la siguiente *desigualdad variacional*

$$\int_U Du \cdot D(w - u) dx \geq \int_U f(w - u) dx,$$

para toda $w \in \mathcal{A}$.

3. Probar que si $u \in W^{2,\infty}(U)$ se tiene que

$$O := \{x \in U \mid u(x) > h(x)\}$$

es abierto, y

$$C := \{x \in U \mid u(x) = h(x)\}$$

es (relativamente) cerrado. Más aún, probar que $u \in C^\infty(O)$,

$$-\Delta u = f \quad \text{en } O$$

y

$$-\Delta u \geq f \quad \text{c.t.p. } U.$$

XX - cf [3]

Explicar por qué los métodos variacionales no funcionan para probar la existencia de un minimizante del funcional

$$I(w) = \int_\Omega (1 + |Dw|^2)^{1/2} dx$$

sobre $\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(\Omega) \mid w = g \text{ en } \partial\Omega\}$, para algún $1 \leq q < \infty$.

Regularidad - cf [3]

Sea $u \in H^1(U)$ una solución débil de

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(Du))_{x_i} = f \quad \text{en } U,$$

donde L verifica:

$$L = L(p), \quad |D^2L(p)| \leq C \quad (p \in \mathbb{R}^n), \quad \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(p) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad (p, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Probar que $u \in H_{loc}^2(U)$.

Multiplicadores de Lagrange

Ecuación subcrítica con el p -Laplaciano

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado suave, $p \in (1, +\infty)$ y $q \in (1, p^*)$, $q \neq p$, encontrar una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } U, \end{cases}$$

minimizando la funcional $I(u) = \frac{1}{p} \int_U |\nabla u|^p dx$, $u \in W_0^{1,p}(U)$, sobre el conjunto $\{u \in W_0^{1,p}(U), \int_U |u|^q dx = 1\}$. Ver que podemos suponer que $u \geq 0$.
¿ Que pasa si $q = p$?.

Problema con condición de borde de Steklov

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado suave. Admitimos que para $q \in [1, 2_*]$, con $2_* = \frac{2(n-1)}{n-2}$, tenemos una inyección continua $H^1(U) \hookrightarrow L^q \partial U$ que es además compacta si $q < 2_*$.
Dado $q \in (1, 2_*)$, $q \neq 2$, encontrar una solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{q-2}u & \text{en } \partial U \end{cases}$$

minimizando la funcional $I(u) = \frac{1}{2} \int_U |\nabla u|^2 + |u|^2 dx$, $u \in H^1(U)$, sobre el conjunto $\{u \in H^1(U), \int_{\partial U} |u|^q = 1\}$. Que sucede si $p = 2$?
Generalizar al p -Laplaciano Δ_p admitiendo que la inyección $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q \partial U$ es continua para $1 \leq q \leq p_* := \frac{p(n-1)}{n-p}$, y que es además compacta si $q < p_*$.

Teorema del paso de la montaña

Ejercicio 1

Supongamos que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ (con X un espacio de Banach) tiene dos mínimos locales u_1 y u_2 con $I(u_1) \geq I(u_2)$, el mínimo u_1 siendo estricto. Suponemos además que I verifica la condición de Palais-Smale. Probar que I tiene un tercer punto crítico.

Ejercicio 2 - ver [3]

Probar, usando el Teorema del Paso de la Montaña, que existe una solución débil no trivial de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, u) & \text{en } U, \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde U es un abierto acotado suave de \mathbb{R}^n y $f : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suave y verifica las siguientes hipótesis:

(H1) existe $p \in (2, 2^*)$ y $C > 0$ tal que

$$|f(u)| \leq C(1 + |u|^{p-1}) \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R},$$

(H2) existe $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$0 \leq F(u) \leq \gamma f(u)u \quad \text{donde } F(u) = \int_0^u f(t) dt,$$

(H3) existen constantes $a, A > 0$ tal que

$$a|u|^p \leq F(u) \leq A|u|^p \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R}.$$

Sug: para probar que el funcional asociado es C^1 sobre $H_0^1(U)$, usar los resultados vistos en la teórica.

Nota: este resultado generaliza el ejemplo hecho en clase que corresponde a $f(x, u) = |u|^{p-2}u$.

Ejercicio 2 (ver [1])

Consideramos el problema

$$\begin{aligned}\Delta u &= \mu(u^{p-1} - u^{q-1}) && \text{en } U, \\ u &> 0 && \text{en } U, \\ u &= 0 && \text{en } \partial U,\end{aligned}\tag{2}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado suave, $\mu > 0$ es un parámetro dado, y los exponentes p, q verifican $2 < p < q < 2^*$. Vamos a probar que para μ suficientemente grande (2) tiene dos soluciones.

1. Introducimos la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(u) = \begin{cases} u^{p-1} - u^{q-1}, & \text{si } 0 \leq u \leq 1, \\ 0, & \text{sino.} \end{cases}$$

Verificar que si $u \in H_0^1(U)$ es solución de

$$\Delta u = \mu g(u)\tag{3}$$

entonces $u \in C^\infty(\bar{U})$ y $0 < u \leq 1$. (Sug: para probar que $u \leq 1$ examinar lo que pasaría en $\{u > 1\}$ si este conjunto no fuese vacío).

2. Entonces basta encontrar dos puntos críticos de la funcional $J : H := H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_U |\nabla u|^2 dx - \int_U G(u) dx$$

donde $G(u) = \int_0^u g(t) dt$, $u \in \mathbb{R}$. Verificar que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ y calcular $DJ(u)$.

3. Probar que toda sucesión de Palais-Smale para J_μ es acotada en H y que $\inf_H J_\mu > -\infty$.
4. Deducir que J_μ verifica la condición de Palais-Smale y luego que existe $u_\mu^1 \in H$ tal que $J(u_\mu^1) = \inf_H J_\mu$.
5. Consideramos una función $u \in C_c^\infty(U)$, $u > 0$. Probar que existe $t^* > 0$ y $\mu^* > 0$ tal que

$$J_\mu(t^*u) < 0 \quad \text{para todo } \mu \geq \mu^*.$$

6. Deducir que $\inf_H J_\mu < 0$ y $u_\mu^1 \not\equiv 0$ si $\mu \geq \mu^*$.
7. Encontrar otro punto crítico u_μ^2 de J_μ , $\mu \geq \mu^*$, aplicando el teorema del paso de la montaña. (Sug: notar que $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(u)}{u} = 0$).

Ejercicio 3 - ver [2]

Consideramos en un abierto acotado suave $U \subset \mathbb{R}^2$ el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^3 &= \lambda u & \text{en } U, \\ u &= 0 & \text{en } \partial U, \end{aligned} \tag{4}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Probar que la funcional $I_\lambda : H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_U |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_U |u|^4 dx - \frac{\lambda}{2} \int_U |u|^2 dx$$

esta bien definida y es C^1 . Calcular su diferencial.

2. Probar que $N(u) := \|u\|_4 + \|\nabla u\|_2$ es una norma en $H_0^1(U)$ equivalente a la norma usual. Probar que I_λ es coerciva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Probar que I_λ es sci para la convergencia débil para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Notamos λ_1 el 1er autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(U)$. Probar que I_λ es convexa ssi $\lambda \leq \lambda_1$ y que en este caso es estrictamente convexa. (para $\lambda > \lambda_1$ considerar $I_\lambda(tu)$ donde u es un autofunción de λ_1)
5. Deducir que si $\lambda \leq \lambda_1$ entonces 0 es el único punto de infimum de I_λ y la única solución de (4).
6. Probar que si $\lambda > \lambda_1$ entonces $\inf_{H_0^1(U)} I_\lambda < 0$ y que existe $u_\lambda \in H_0^1(U)$, $u_\lambda \geq 0$, tal que $\pm u_\lambda$ son puntos de mínimo de I_λ y soluciones de (4).

Ejercicio 4 - ver [2]

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado suave. Consideramos la ecuación

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \alpha u + u^3 & \text{en } U, \\ u &= 0 & \text{en } \partial U, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Probar que $u \in H_0^1(U)$ es solución de (5) ssi es punto crítico de un funcional $F_\alpha : H_0^1(U) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 .
2. Probar que para $\alpha < \lambda_1$ (donde λ_1 es el 1er autovalor del laplaciano en $H_0^1(U)$), F_α verifica las hipótesis del lema del paso de la montaña.
Sug: si e_1 es el autofunción asociado con λ_1 tal que $e_1 > 0$ y $\|e_1\|_2 = 1$, verificar que $g(t) := F_\alpha(te_1) < 0$ para $t \geq t_\alpha$.

3. Deducir que para $\alpha < \lambda_1$,

$$c_\alpha := \inf_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \max_{0 \leq t \leq 1} F_\alpha(\gamma(t))$$

es un valor crítico de F_α donde

$$\Gamma_\alpha = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(U)), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = t_\alpha e_1\}.$$

4. Probar que

$$0 < c_\alpha \leq C(\lambda_1 - \alpha)^2. \quad (6)$$

Sug: estudiar g .

5. Consideramos un punto crítico u_α tal que $F_\alpha(u_\alpha) = c_\alpha$. Se puede suponer (porque ?) que $u_\alpha \geq 0$. Probar que u_α es una solución clásica positiva de (5) con $\|u_\alpha\|_{C^{2,\gamma}(\bar{U})} \leq C\|u_\alpha\|_{H_0^1}$.

6. Probar que $u_\alpha \rightarrow 0$ in $H_0^1(U)$ (usar (6) y luego en $C^2(\bar{U})$).

7. Sea $v_\alpha := \frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|_{H_0^1}}$. Verificar que

$$-\Delta v_\alpha = \alpha v_\alpha + O(\lambda_1 - \alpha)v_\alpha^3$$

y que $\|v_\alpha\|_{C^{2,\gamma}(\bar{U})} \leq C$.

8. Deducir que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \lambda_1} \frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|_{H_0^1}} = \frac{e_1}{\|e_1\|_{H_0^1}}.$$

Referencias

- [1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear problems, Cambridge studies in advanced mathematics 104.
- [2] F. Bethuel, notas de clase - disponible a <http://www.ljll.math.upmc.fr/mbio/cours/bethuel.php>
- [3] L.C. Evans, Partial differential equations.